

ARTICLE PRINCIPAL

RECOUVRANT EN PARTIE

LA THÈSE DE DOCTORAT ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PRÉSENTÉE

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

PAR

Jacques MAUSS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

Sujet de la Thèse : PROBLÈMES DE PERTURBATION SINGULIÈRE LIÉS A UNE ÉQUATION
AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DE TYPE ELLIPTIQUE

Soutenue le 24 mai 1971 devant la Commission d'examen

MM. P. GERMAIN *Président*

J. L. LIONS

M. BERGER

W. ECKHAUS

} *Examineurs*

GAUTHIER-VILLARS ÉDITEUR

55, quai des Grands-Augustins, Paris 6^e

1971



Comportement asymptotique des solutions de problèmes de perturbation singulière pour une équation de type elliptique *

par

Jacques MAUSS ** .

RÉSUMÉ. — On considère des problèmes de perturbation singulière pour une équation linéaire du second ordre de type elliptique à deux variables indépendantes. Ce problème fut résolu par W. Eckhaus et E. M. de Jager dans le cas de domaines bornés et convexes; plus précisément, le caractère asymptotique d'un développement formel de la solution par rapport à un petit paramètre fut prouvé. Toutefois, quand la frontière n'est pas convexe, les approximations peuvent contenir des termes dits de « couche limite libre », et, l'analyse précédente ne s'applique plus. Ces termes de « couche limite libre » sont aussi présents dans d'autres cas, et, particulièrement, lorsque certaines conditions de régularité des données ne sont pas remplies. De plus, la démonstration du caractère asymptotique est basée sur le principe du maximum, qui n'est plus vrai pour des domaines non bornés. A ce jour, très peu de résultats ont été publiés sur ces deux problèmes. Cet article peut être considéré comme une première approche dans l'étude de la couche limite libre d'une part, et des domaines non bornés, d'autre part. Le but est d'obtenir des approximations asymptotiques pour des domaines non bornés simples avec des termes de couche limite libre et, ainsi, de donner quelques idées pour l'étude ultérieure de problèmes plus élaborés se posant en Physique mathématique; par exemple, l'étude faite par L. Todd d'un écoulement de Hartmann dans une conduite annulaire.

ABSTRACT. — One considers singular perturbation problems for a linear second order differential equation of elliptic type, in two independent variables. This problem was solved by Eckhaus and de Jager in the case of a bounded convex domain. More precisely, the asymptotic nature of a formal expansion in a small parameter was proved. However, when the boundary is not convex, the approximation will contain the so-called "free boundary layer" and the precedent analysis is not valid. Free boundary layer is also expected in other cases, and particularly when differentiability conditions are not fulfilled. Moreover, the proof of the asymptotic nature is based on the maximum principle which is not true for unbounded domains. Very

* Ce travail fait partie d'une thèse de Doctorat ès Sciences actuellement en préparation.

** Attaché de Recherche au C. N. R. S. Équipe de recherche associée au C. N. R. S. (Mécanique des Fluides), Département de Mécanique. Faculté des Sciences de Paris.

little has been published on these two subjects. This paper can be considered as a first approach to the study of unbounded domains and of the free boundary layer. The aim is to obtain an asymptotic approximation for simple unbounded domains with "free boundary layer" terms and so, to give some ideas in the subsequent study of more elaborated problems which arise in Mathematical Physics; e. g., the Hartmann flow in an annular channel (L. Todd).

1. Introduction.

L'équation considérée est

$$(1) \quad L_{\varepsilon}[\Phi(x, y)] \equiv \varepsilon \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right] - \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0,$$

où ε est un paramètre positif petit. La fonction $\Phi(x, y)$ est définie dans un domaine G et prend sur la frontière Γ de celui-ci des valeurs imposées $f_{\varepsilon}(x, y)$;

$$(2) \quad \Phi(x, y)|_{\Gamma} = f_{\varepsilon}(x, y)|_{\Gamma}.$$

Ce type de problème apparaît souvent en physique mathématique, citons, par exemple, J. A. Shercliff [1], D. Chiang et T. Lundgreen [2], J. R. Jones et T. S. Walters [3].

Ce problème fut d'abord étudié par M. I. Visik et L. A. Lyusternik [4], puis, par W. Eckhaus et E. M. De Jager [5] qui justifèrent, sous certaines hypothèses de régularité des données, un développement formel de la fonction Φ , par rapport au petit paramètre ε . Toutefois, dans l'analyse faite, il était exigé que le domaine considéré soit borné et que la frontière de celui-ci soit convexe. Cette dernière condition assurait, dans une certaine mesure, que les approximations asymptotiques construites ne contiendraient pas des termes dits de « couche limite libre ». Une couche limite libre peut être rapidement définie comme une fonction exponentiellement petite dans G , par rapport à ε , sauf au voisinage d'une ligne située à l'intérieur de G , les dérivées d'une telle fonction, dans une direction normale à cette ligne, étant alors grandes lorsque ε est petit.

L'existence de ces couches limites libres peut être illustrée à l'aide des deux figures ci-dessous :

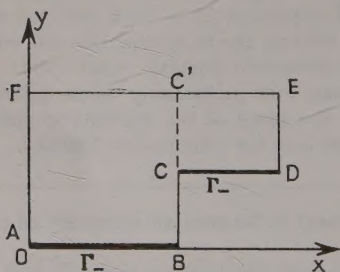


Fig. 1.

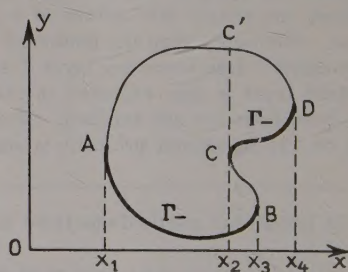


Fig. 2.

Il est facile de se rendre compte que les problèmes correspondants ne sont pas résolubles à l'aide des techniques développées par M. I. Visik et L. A. Lyusternik [4] et par W. Eckhaus et E. M. De Jager [5]. Les difficultés rencontrées, par exemple dans le cas de la figure 1, ne peuvent être levées que par l'introduction d'une couche limite libre au voisinage de la ligne CC' . D'une façon analogue, lorsque des subcaractéristiques (caractéristiques de l'équation réduite obtenue en posant $\varepsilon = 0$), tangentes au domaine, pénètrent dans celui-ci (*fig. 2*), la théorie développée en [4] et [5] ne s'applique plus et des couches limites libres apparaissent. Celles-ci apparaissent aussi dans d'autres cas; par exemple, lorsque les données aux limites sont discontinues ou possèdent des dérivées discontinues, ou bien, lorsque la frontière n'est pas suffisamment régulière.

Ainsi, ce phénomène de « couche limite libre » présente différents aspects intéressants; pourtant, jusqu'à maintenant, très peu d'études ont été faites sur ce sujet. Les quelques résultats obtenus ont un caractère plus appliqué que mathématique.

En outre, les problèmes particuliers posés par les domaines non bornés seront abordés. Dans ce cas, les estimations asymptotiques, issues du théorème du maximum [5] ne sont plus valables. Pour de tels domaines, les problèmes du type (1), (2) n'ont guère été étudiés à ce jour [6], et il était intéressant d'envisager les moyens permettant leur étude. De plus, et comme on va le voir, cette juxtaposition se justifie dans la mesure où, pour le problème aux limites particulier que l'on considère, le processus d'itération permettant l'étude de certains domaines non bornés est le même que celui qui permet d'étudier la couche limite libre. Enfin, la simplicité des domaines envisagés, permet aussi de mieux mettre en évidence la structure des résultats obtenus.

D'une façon assez générale, la construction d'un développement formel de la solution d'un problème du type (1), (2) n'est pas l'aspect le plus difficile du problème posé. En particulier, des considérations assez simples, telles que le principe de moindre dégénérescence, permettent souvent d'obtenir un développement de la solution sans trop de difficultés.

Toutefois, pour certains problèmes plus complexes (L. Todd, [11]), l'intuition peut être mise en défaut dès le premier ordre. Il est donc, de toute façon, intéressant de trouver une approche plus systématique pour construire de tels développements. Dans cet article, on se propose d'accorder une importance particulière à ce point de vue en appliquant les idées suggérées par W. Eckhaus [7] en ce qui concerne le « raccordement asymptotique » dans le plan. Toutefois, et ceci est considéré comme une première étape, on se contentera d'étudier des problèmes pour lesquels on aurait pu, *a priori*, trouver des approximations des solutions sans faire appel à des techniques plus élaborées. Par exemple, si l'on considère

l'équation (1) et que l'on veuille étudier les solutions pour y grand, on est conduit à poser

$$\bar{x} = x, \quad \bar{y} = \varepsilon^\alpha y \quad (\alpha > 0).$$

L'application du principe de moindre dégénérescence amène à prendre $\alpha = 1$ et l'équation limite s'écrit,

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \bar{x}^2} - \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{y}} = O(\varepsilon^2) \quad (1).$$

De même, si l'on suppose la présence d'une discontinuité dans les données en $x = 0$, l'équation limite doit propager la discontinuité; on introduit alors le changement d'échelle,

$$x = \varepsilon^\beta x^*, \quad y = y^* \quad (\beta > 0),$$

et on est conduit à prendre $\beta = \frac{1}{2}$, ce qui donne

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^{*2}} - \frac{\partial \Phi}{\partial y^*} = O(\varepsilon).$$

Cette situation favorable, précédemment annoncée, où les deux équations limites obtenues sont les mêmes, est due au fait que les coefficients de l'équation sont constants. Ce cas est d'ailleurs très important, car c'est celui qui apparaît le plus souvent en Physique mathématique et plus particulièrement en Magnétohydrodynamique (Écoulement d'un fluide conducteur dans une conduite).

De plus, et c'est le but essentiel de ce travail, tous les résultats, suggérés par une analyse plus ou moins intuitive, seront justifiés.

En premier lieu, un théorème d'estimation, valable pour une classe de domaines non bornés, sera établi, puis appliqué à un domaine très simple ($y \geq 0$).

En second lieu, sur ce même domaine, on introduira des discontinuités dans les données, l'étude étant faite de façon assez systématique pour suggérer une extension à d'autres cas. Cette étude permet alors de définir plus précisément ce que l'on entend par couche limite libre, et, de faire une analyse des cas où elle est susceptible d'apparaître.

Enfin, le cas du domaine défini par une « marche » est traité, ce qui, compte tenu des résultats obtenus, par exemple en [5], permet de donner une approximation du premier ordre, pour un domaine tel que celui de la figure 1.

(1) Symbolisme de Landau.

2. Un théorème d'estimation.

Les estimations faites jusqu'à présent [5], pour des problèmes aux limites elliptiques du type (1), (2), reposent essentiellement sur le principe du maximum. Pour des domaines non bornés, le principe de Phragmén Lindelöf ([8], chap. II) permet, en imposant certaines restrictions sur la croissance de la solution à l'infini, de trouver des estimations de la solution. Dans le cas de l'équation (1), il est possible de formuler de façon explicite le principe qui permet de trouver les estimations cherchées [6]. Soit l'équation,

$$(3) \quad L_{\varepsilon}[u] \equiv \varepsilon \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] - \frac{\partial u}{\partial y} = -h_{\varepsilon}(x, y),$$

où $u(x, y)$ est une fonction définie dans un domaine G non borné, qui prend sur la frontière Γ de ce domaine des valeurs imposées $\varphi_{\varepsilon}(x, y)$

$$(4) \quad u(x, y)|_{\Gamma} = \varphi_{\varepsilon}(x, y)|_{\Gamma}.$$

Le domaine G est supposé inclus dans le demi-plan $y > y_0$, où y_0 est un nombre positif arbitraire. La fonction

$$(5) \quad w(r, \theta) = I_0\left(\frac{r}{2\varepsilon}\right) \exp\left\{\frac{r \sin \theta}{2\varepsilon}\right\}$$

est une solution positive de l'équation homogène (3) et (r, θ) sont les coordonnées polaires habituelles par rapport au point de référence arbitraire (x_0, y_0) :

$$\begin{cases} x - x_0 = r \cos \theta, \\ y - y_0 = r \sin \theta, \end{cases}$$

enfin, I_0 est la fonction de Bessel modifiée de première espèce [9].

Dans ces conditions, l'application du principe de Phragmén-Lindelöf formulé en [8] conduit sans difficulté au théorème suivant :

THÉORÈME 1. — *Si une solution du problème (3), (4) vérifie la condition*

$$(6) \quad \lim_{A \rightarrow \infty} \left[\sup_{w=A} \frac{|u|}{w} \right] = 0$$

et si

$$h_{\varepsilon}(x, y) \geq 0 \quad \text{dans } G, \quad \varphi_{\varepsilon}(x, y) \geq 0 \quad \text{sur } \Gamma,$$

alors, dans G , $u(x, y) \geq 0$.

De ce théorème résulte immédiatement deux corollaires :

COROLLAIRE 1 (Unicité). — *Il existe, au plus, une fonction $u(x, y)$ solution du problème (3), (4) et vérifiant la condition (6).*

En effet, le problème étant linéaire, s'il existe deux solutions u_1 et u_2 vérifiant la condition (6), $u_1 - u_2$ et $u_2 - u_1$ sont solutions du problème homogène et vérifient aussi la condition (6). L'application du théorème entraîne à la fois,

$$u_1 - u_2 \leq 0 \quad \text{et} \quad u_1 - u_2 \geq 0 \quad \text{dans } G,$$

ce qui implique le résultat : $u_1 \equiv u_2$ dans G .

COROLLAIRE 2 (Fonction barrière). — *Si une fonction $U(x, y)$ vérifie la condition (6) et les inégalités,*

$$L_\varepsilon[-U] \geq |h_\varepsilon(x, y)| \quad \text{dans } G, \quad U(x, y) \geq |\varphi_\varepsilon(x, y)| \quad \text{sur } \Gamma,$$

alors, $U(x, y)$ est une fonction barrière pour $u(x, y)$:

$$U(x, y) \geq |u(x, y)| \quad \text{dans } G.$$

D'une part,

$$L_\varepsilon[\pm u - U] = \mp h_\varepsilon(x, y) + L_\varepsilon[-U],$$

donc, par hypothèse,

$$L_\varepsilon[\pm u - U] \geq 0 \quad \text{dans } G.$$

D'autre part,

$$(\pm u - U) \leq 0 \quad \text{le long de } \Gamma.$$

Le théorème 1 s'applique encore une fois, et $\pm u \leq U$ dans G . Ce corollaire permet de démontrer le théorème d'estimation qui va suivre et qui sera constamment utilisé [6].

THÉORÈME 2. — *Si pour ε suffisamment petit,*

$$\iint_G S_0(x, y; \xi, \eta) |h_\varepsilon(\xi, \eta)| d\xi d\eta = O(\varepsilon^\mu) \quad \text{dans } G,$$

$$|\varphi_\varepsilon(x, y)| = O(\varepsilon^\nu) \quad \text{sur } \Gamma,$$

alors, la solution du problème (3), (4), vérifiant la condition (6), est, si elle existe, telle que

$$|u(x, y)| = O(\varepsilon^{\min(\mu, \nu)}) \quad \text{dans } G,$$

où

$$S_0(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi\varepsilon} K_0\left(\frac{r}{2\varepsilon}\right) \exp\left\{\frac{r \sin \theta}{2\varepsilon}\right\},$$

avec,

$$x - \xi = r \cos \theta; \quad y - \eta = r \sin \theta,$$

et où K_0 est la fonction de Bessel modifiée de troisième espèce [9].

Par hypothèse, il existe deux nombres positifs M_1 et M_2 , indépendants de ε , tels que, pour ε suffisamment petit, on ait

$$u_1(x, y) = \iint_G S_0(x, y; \xi, \eta) |h_\varepsilon(\xi, \eta)| d\xi d\eta < M_1 \varepsilon^\mu,$$

$$u_2(x, y) = M_2 \varepsilon^\nu > |\varphi_\varepsilon(x, y)| \text{ sur } \Gamma.$$

La fonction $U(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y)$ est une fonction barrière pour $u(x, y)$. En effet, d'une part,

$$L_\varepsilon[-U] = L_\varepsilon[-u_1 - u_2] = L_\varepsilon[-u_1] = |h_\varepsilon(x, y)|,$$

d'autre part, le long de Γ ,

$$U = u_1 + M_2 \varepsilon^\nu > |\varphi_\varepsilon(x, y)|, \quad \text{car } u_1 \geq 0.$$

Par suite, le corollaire 2 s'applique, et

$$u_1 + u_2 \geq |u| \quad \text{dans } G.$$

En vertu des hypothèses faites, ceci entraîne

$$|u(x, y)| \leq M \varepsilon^{\min(\mu, \nu)}, \quad \text{où } M = \max(M_1, M_2).$$

Dans la partie suivante, on se propose, sur le modèle envisagé dans l'introduction, de trouver une approximation asymptotique de la solution qui sera justifiée à l'aide de ce théorème.

3. Le problème du demi-plan.

On considère le problème (1), (2) sous la forme :

$$(7) \quad L_\varepsilon[\Phi(x, y)] = 0; \quad \Phi(x, 0) = f(x),$$

où Φ est une fonction définie dans la région $y \geq 0$.

Ce problème particulier peut être complètement traité à l'aide de la transformation de Fourier ou bien avec la méthode des images. Toutefois, le processus envisagé sera différent afin de permettre l'adaptation à d'autres problèmes aux limites pour lesquels ces méthodes sont difficilement utilisables.

On se propose, en effet, à l'aide du théorème d'estimation obtenu précédemment, de démontrer le résultat suivant :

THÉORÈME 3. — Si $f(x)$ est de classe C_3 et $|f'''|$ intégrable, et si

$$(8) \quad \Phi_0(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon y}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp\left\{-\frac{(x-t)^2}{4\varepsilon y}\right\} dt,$$

alors, uniformément dans le demi-plan $y \geq 0$,

$$(9) \quad \Phi(x, y) = \Phi_0(x, y) + O(\varepsilon^2).$$

$\Phi_0(x, y)$ est la solution bien connue du problème aux limites

$$(10) \quad \varepsilon \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2} - \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} = 0; \quad \Phi_0(x, 0) = f(x).$$

Compte tenu des hypothèses faites sur f , cette solution peut se mettre sous la forme parfois plus commode :

$$(8a) \quad \Phi_0(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t\sqrt{2\varepsilon y} + x) \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt.$$

Pour étudier si $\Phi_0(x, y)$ constitue une approximation asymptotique de $\Phi(x, y)$, il faut poser

$$(11) \quad \Phi(x, y) = \Phi_0(x, y) + z_0(x, y),$$

et étudier le reste $z_0(x, y)$.

Dans le domaine $y \geq 0$, z_0 obéit au problème suivant :

$$L_\varepsilon[z_0(x, y)] = -\varepsilon \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y^2}; \quad z_0(x, 0) = 0.$$

Or, le calcul de $\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y^2}$ se fait sans difficulté :

$$\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y^2} = \frac{\varepsilon^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{\pi y}} \int_{-\infty}^{\infty} t \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} f'''(t\sqrt{2\varepsilon y} + x) dt.$$

Le théorème 2 issu du principe de Phragmen-Lindelöf s'applique ici directement; une estimation de $z_0(x, y)$ sera obtenue si l'on parvient à majorer l'intégrale,

$$Z_0(x, y) = \frac{\varepsilon^{\frac{3}{2}}}{4\pi^{\frac{3}{2}}} \iint_{\eta \geq 0} \left\{ \exp\left(-\frac{\eta - y}{2\varepsilon}\right) K_0 \left[\frac{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}}{2\varepsilon} \right] \right. \\ \left. \times \int_{-\infty}^{\infty} |t| e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{|f'''(t\sqrt{2\varepsilon\eta} + \xi)|}{\sqrt{\eta}} dt \right\} d\xi d\eta.$$

En appendice I, on démontre que si $|f'''|$ est majorable par une fonction positive, bornée et intégrable $\mu(x)$, il existe un nombre C positif, indépendant de ε , tel que, pour ε suffisamment petit,

$$Z_0(x, y) \leq C\varepsilon^2;$$

ce dernier résultat permet de conclure que, dans le domaine considéré $y \geq 0$, $z_0(x, y)$ est au plus de l'ordre de ε^2 , ce qui, compte tenu de la relation (11), conduit au résultat cherché (9). Ceci montre que, au moins pour ce modèle de domaine non borné, le processus qui consiste à prendre la solution de l'équation réduite n'est pas le processus approprié. Plus précisément, on a le résultat suivant :

Tant que y reste de l'ordre de 1, la solution de l'équation réduite vérifiant les conditions aux limites, est une approximation asymptotique de $\Phi(x, y)$

$$(12) \quad \Phi(x, y) = f(x) + O(\varepsilon y).$$

Pour le démontrer, on remarque que l'intégrale (8) donnant $\Phi_0(x, y)$ peut être développée asymptotiquement pour εy petit.

Les techniques d'estimation de telles intégrales sont bien connues [10], le calcul pouvant se faire ici directement. Dans l'intégrale (8), la contribution la plus importante pour εy petit, provient du voisinage du point $t = x$; $f(t)$ étant développé en série de Taylor au voisinage de cette valeur, il vient

$$\begin{aligned} \Phi_0(x, y) &= \frac{f(x)}{2\sqrt{\pi\varepsilon y}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(x-t)^2}{4\varepsilon y}\right\} dt \\ &+ \frac{f'(x)}{2\sqrt{\pi\varepsilon y}} \int_{-\infty}^{\infty} (t-x) \exp\left\{-\frac{(x-t)^2}{4\varepsilon y}\right\} dt + R, \end{aligned}$$

avec

$$|R| \leq \frac{|f''(\xi)|}{4\sqrt{\pi\varepsilon y}} \int_{-\infty}^{\infty} (t-x)^2 \exp\left\{-\frac{(x-t)^2}{4\varepsilon y}\right\} dt,$$

où ξ est une valeur de l'intervalle d'intégration. La fonction $f''(\xi)$ étant bornée, un calcul simple donne,

$$\Phi_0(x, y) = f(x) + O(\varepsilon y),$$

ce qui implique la relation (12) compte tenu de (9).

Sur ce même modèle, l'étude d'une discontinuité dans les données qui va maintenant être faite, montrera l'intérêt de la méthode utilisée et permettra ainsi de dégager les premières idées permettant de définir la couche limite libre.

4. Discontinuité dans les données.

La fonction $f(x)$ est cette fois supposée discontinue. Pour fixer les idées, la discontinuité de f est supposée en $x = 0$, f étant identiquement nulle pour x négatif. Toutes les hypothèses de régularité sur f , imposées précédemment, seront supposées remplies pour $x \geq 0$ [$f(0) = 1$]. Cette singularité nécessite l'étude attentive du voisinage de l'origine. A cet effet, et suivant les idées proposées par W. Eckhaus [7], on considère la famille à deux paramètres de coordonnées locales :

$$x = x_\mu \varepsilon^{1/\mu}, \quad y = y_\nu \varepsilon^\nu,$$

où μ et ν sont deux nombres positifs. L'équation (7) s'écrit

$$\varepsilon^{1-2\mu} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_\mu^2} + \varepsilon^{1-2\nu} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_\nu^2} - \varepsilon^{-\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial y_\nu} = 0.$$

Compte tenu de la formulation du problème, la variation de μ et de ν permet de mettre en évidence les résultats suivants :

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\varepsilon \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \quad \text{pour } \mu = \frac{1}{2}, \quad \nu = 0; \\
 (b) \quad & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_\mu^2} - \frac{\partial \Phi}{\partial y_\nu} = \varepsilon^{1-\nu} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_\nu^2} \quad \text{pour } 2\mu = \nu + 1, \quad 0 < \nu < 1; \\
 (c) \quad & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_1^2} - \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} = 0 \quad \text{pour } \mu = \nu = 1.
 \end{aligned}$$

Pour tout autre couple de valeurs de μ et de ν , les équations correspondantes sont des formes dégénérées de l'une des équations précédentes. Ces trois équations semblent fondamentales pour l'étude de la structure de la solution. Les développements asymptotiques basés sur (a) et (c) doivent avoir un domaine de validité commun pour $2\mu = \nu + 1$, $0 < \nu < 1$, comme suggéré par l'équation (b).

D'autre part, pour $x \geq 0$, les conditions imposées $f(x)$ peuvent être développées :

$$f(x) = 1 + O(x_\mu \varepsilon^\mu) = 1 + O(x_1 \varepsilon), \quad \text{avec } f(0) = 1.$$

Au premier ordre, on obtient donc, naturellement, les deux problèmes analytiques suivants :

$$(i) \quad \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_1}{\partial y_1^2} - \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial y_1} = 0, \quad \tilde{\varphi}_1(x_1, 0) = Y(x_1),$$

où $Y(x_1)$ est la fonction d'Heaviside;

$$(ii) \quad \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_0}{\partial x_1^2} - \frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial y} = 0,$$

avec pour conditions aux limites, des conditions de « raccordement asymptotique ». En particulier, la condition

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{\varphi}_0 \left(x_\mu \varepsilon^{\mu - \frac{1}{2}}, y_\nu \varepsilon^\nu \right) &= \lim \tilde{\varphi}_1(x_\mu \varepsilon^{\mu-1}, y_\nu \varepsilon^{\nu-1}), \\ \varepsilon \rightarrow 0, \quad 2\mu = \nu + 1, \quad 0 < \nu < 1 \end{aligned} \right.$$

exprime que $\tilde{\varphi}_0$ et $\tilde{\varphi}_1$ doivent avoir un domaine de validité commun comme indiqué précédemment; $\tilde{\varphi}_1$ doit donner une approximation de la solution au voisinage de l'origine, $\tilde{\varphi}_0$ au voisinage de la ligne $x = 0$. Il faut donc aussi exprimer que $\tilde{\varphi}_0$ se raccorde avec la solution valable en dehors de la ligne $x = 0$ (qui aurait pu être obtenue en posant $\varepsilon = 0$). Or, au paragraphe précédent, du fait que le domaine n'est pas borné, on a vu

qu'il fallait considérer l'équation de la chaleur plutôt que l'équation réduite. Le problème (ii) est donc remplacé par

$$(iii) \quad \varepsilon \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} = 0, \quad \varphi_0(x, 0) = f(x).$$

Il faudra, bien entendu, vérifier que la condition de raccord (13) est remplie lorsque l'on remplace $\tilde{\varphi}_0(x_1, y)$ par $\varphi_0(x, y)$.

La solution du problème (i) s'obtient par la méthode des images (Appendice II) :

$$\tilde{\varphi}_1(x_1, y_1) = \frac{y_1 \exp\left\{\frac{y_1}{2}\right\}}{2\pi} \int_0^\infty \frac{K_1\left(\frac{r_1}{2}\right)}{r_1} d\xi_1,$$

avec

$$r_1 = \{(x_1 - \xi_1)^2 + y_1^2\}^{\frac{1}{2}},$$

où K_1 est la fonction de Bessel modifiée de troisième espèce d'ordre 1 [9].

Pour le problème (iii), la solution est bien connue et s'écrit

$$(14) \quad \varphi_0(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon y}} \int_0^\infty f(t) \exp\left\{-\frac{(x-t)^2}{4\varepsilon y}\right\} dt.$$

Pour vérifier la condition de raccordement asymptotique, on pose

$$(15) \quad \begin{aligned} \varphi_2(x, y) &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{2\sqrt{\varepsilon y}}}^\infty \exp\{-t^2\} dt \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon y}} \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{(t-x)^2}{4\varepsilon y}\right\} dt; \end{aligned}$$

Un calcul simple montre (Appendice III)

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ 2\mu = \nu + 1 \\ 0 < \nu < 1}} \varphi_0(x_\mu \varepsilon^\mu, y_\nu \varepsilon^\nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x_\mu}{2\sqrt{y_\nu}}}^\infty \exp\{-t^2\} dt = -\varphi_2(x, y).$$

De même, l'estimation de l'intégrale donnant $\tilde{\varphi}_1(x_1, y_1)$, par la méthode de Laplace [10] (Appendice III) donne

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ 2\mu = \nu + 1 \\ 0 < \nu < 1}} \tilde{\varphi}_1(x_\mu \varepsilon^{\mu-1}, y_\nu \varepsilon^{\nu-1}) = -\varphi_2(x, y).$$

La condition (13) étant remplie de façon non banale, il est naturel d'envisager le développement uniforme (composite) :

$$(16) \quad \Phi(x, y) = \varphi_0(x, y) + \varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y) + z_0(x, y),$$

où l'on pose,

$$(17) \quad \tilde{\varphi}_1(x_1, y_1) = \varphi_1(x, y) = \frac{y \exp \left\{ \frac{y}{2\varepsilon} \right\}}{2\pi\varepsilon} \int_0^\infty \frac{K_1 \left(\frac{r}{2\varepsilon} \right)}{r} d\xi,$$

avec

$$r = \{ (x - \xi)^2 + y^2 \}^{\frac{1}{2}}$$

Intuitivement, on peut se rendre compte qu'au voisinage de l'origine, φ_1 doit donner une approximation de la solution, tandis que φ_0 n'y est pas valable; toutefois, du fait de la condition (13), $\varphi_0 + \varphi_2$ tend vers zéro au voisinage de l'origine.

En dehors de l'origine, où φ_0 est valable, c'est $\varphi_1 + \varphi_2$ qui tend vers zéro. Il reste à démontrer que, dans le domaine considéré, $z_0(x, y)$ est bien uniformément petit lorsque ε tend vers zéro.

Il faut remarquer, en premier lieu, que $\varphi_2(x, y)$ vérifie l'équation de la chaleur et prend sur la frontière $y = 0$, la valeur $-Y(x)$. Par suite, le problème pour z_0 s'écrit

$$(18) \quad \begin{cases} \varepsilon \left[\frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2} \right] - \frac{\partial z_0}{\partial y} = -\varepsilon \left[\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} \right], \\ z_0(x, 0) = 0. \end{cases}$$

Le calcul du second membre de l'équation se fait sans difficulté

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} &= \frac{\varepsilon^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}y} \int_{-\frac{x}{2\sqrt{\varepsilon}y}}^\infty t \exp \{ -t^2 \} f'''(2t\sqrt{\varepsilon}y + x) dt \\ &+ \exp \left\{ -\frac{x^2}{4\varepsilon y} \right\} \left[\frac{1}{8} \frac{f'(0)}{\sqrt{\varepsilon\pi}} \frac{x^2}{y^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\pi}} \frac{f'(0)}{y^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\pi}} \frac{x f''(0)}{y^{\frac{3}{2}}} \right]. \end{aligned}$$

Les deux premières singularités dans le crochet ne permettent pas d'appliquer le théorème 2 d'estimation; il est nécessaire, afin de les éliminer, de procéder à une « régularisation » [5]. Il est clair que si $f'(0) = 0$, il en est ainsi.

LEMME. — Si $f'(0) = 0$ et si, de plus,

$$\int_0^\infty |f'''(t)| dt = O(\varepsilon^\mu), \quad |f''(0)| = O(\varepsilon^\nu),$$

alors, uniformément,

$$|z_0(x, y)| = O(\varepsilon^{2 + \min(\mu, \nu)}).$$

Pour démontrer ce lemme, il faut poser

$$h_1(x, y) = \frac{\varepsilon^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{\pi}y} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\varepsilon}y}}^{\infty} |t| \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} |f'''(t\sqrt{2\varepsilon}y + x)| dt,$$

$$h_2(x, y) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\pi}} \frac{|x| \cdot |f''(0)|}{y^{\frac{3}{2}}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4\varepsilon y}\right\},$$

et estimer les intégrales

$$Z_i(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\eta \geq 0} \exp\left\{-\frac{\eta - y}{2\varepsilon}\right\} K_0\left[\frac{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}}{2\varepsilon}\right] h_i(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

pour $i = 1$ et $i = 2$.

En Appendice I, il est démontré que, pour ε suffisamment petit, il existe deux nombres positifs B_1 et B_2 , indépendants de ε , tels que

$$Z_1(x, y) < B_1 \varepsilon^2 \int_0^{\infty} |f'''(t)| dt, \quad Z_2(x, y) < B_2 \varepsilon^2 |f''(0)|.$$

L'application du théorème 2 est alors immédiate et conduit au résultat annoncé.

Dans le cas général où $f'(0)$ est différent de zéro, on se ramène dans le cadre du lemme en considérant la fonction $\bar{f}(x)$, définie pour $x \geq 0$, par

$$(19) \quad \bar{f}(x) = f(x) - x \exp\left\{-\frac{x}{\varepsilon}\right\} f'(0);$$

$\bar{f}(x)$ est une fonction telle que :

$$\bar{f}(0) = f(0) = 1, \quad \bar{f}'(0) = 0, \quad \bar{f}(x) = f(x) + O(\varepsilon).$$

On considère la fonction

$$(20) \quad \bar{\varphi}_0(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}y} \int_0^{\infty} \bar{f}(t) \exp\left\{-\frac{(x-t)^2}{4\varepsilon y}\right\} dt,$$

et le développement composite,

$$(21) \quad \Phi(x, y) = \bar{\varphi}_0(x, y) + \varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y) + \bar{z}_0(x, y).$$

Le problème pour $\bar{z}_0$ s'écrit

$$(22) \quad \begin{cases} \varepsilon \left[\frac{\partial^2 \bar{z}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{z}_0}{\partial y^2} \right] - \frac{\partial \bar{z}_0}{\partial y} = -\varepsilon \left[\frac{\partial^2 \bar{\varphi}_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} \right], \\ \bar{z}_0(x, 0) = x Y(x) \exp\left\{-\frac{x}{\varepsilon}\right\} f'(0). \end{cases}$$

L'évaluation du second membre se fait comme pour le problème (18), mais cette fois, $\bar{f}'(0) = 0$. De plus, les conditions aux limites sont unifor-

mément de l'ordre de ε , et, il est facile de se rendre compte que

$$\int_0^\infty |\bar{f}'''(t)| dt = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \quad |\bar{f}''(0)| = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right),$$

où l'on a supposé, pour fixer les idées, que $f(x)$ était indépendant de ε . Dans ces conditions, le problème étant linéaire, le lemme précédent joint au théorème 2 s'appliquent, et uniformément,

$$\bar{z}_0(x, y) = O(\varepsilon).$$

Pour revenir au problème (18), on remarque que

$$\varphi_0(x, y) = \bar{\varphi}_0(x, y) + \frac{f'(0)}{2\sqrt{\pi\varepsilon y}} \int_0^\infty t \exp\left\{-\frac{t}{\varepsilon} - \frac{(x-t)^2}{4\varepsilon y}\right\} dt;$$

or, pour $t \geq 0$, $t \exp\left\{-\frac{t}{\varepsilon}\right\}$ est uniformément de l'ordre de ε . Il s'ensuit que, dans la région considérée,

$$(23) \quad \varphi_0(x, y) = \bar{\varphi}_0(x, y) + O(\varepsilon).$$

La « régularisation » est donc obtenue par une modification asymptotiquement petite de la solution initiale. Cette relation, compte tenu de (16) et de (21), implique finalement le résultat cherché,

$$z_0(x, y) = O(\varepsilon),$$

d'où le théorème :

THÉORÈME 4. — *Les fonctions $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ étant données par les relations (14), (17) et (15), une approximation asymptotique de la solution du problème considéré est donnée par (16), avec, uniformément,*

$$(24) \quad \begin{cases} |z_0(x, y)| = O(\varepsilon) & \text{si } f(0) \neq 0, \quad f'(0) \neq 0, \\ |z_0(x, y)| = O(\varepsilon^2) & \text{si } f'(0) = 0. \end{cases}$$

Il est possible, comme précédemment, de développer $\varphi_0(x, y)$ pour εy petit. En dehors de la ligne $x = 0$, il vient

$$\varphi_0(x, y) = f(x) + O(\varepsilon y),$$

la fonction $f(x)$ étant supposée identiquement nulle pour $x < 0$. Ce résultat est faux pour x voisin de zéro. Par conséquent, en dehors de l'origine, et dans un voisinage de la ligne $x = 0$, les dérivées par rapport à x de la solution sont grandes pour εy petit,

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} = O\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon y}}\right) \quad \text{pour } x = 0, \quad y \neq 0.$$

La solution présente donc les aspects d'une couche limite le long de la subcaractéristique $x = 0$.

La couche limite libre ainsi mise en évidence peut s'étudier de façon plus générale chaque fois que des singularités sont présentes dans les données. L'objet du paragraphe suivant est d'essayer d'en préciser la définition et d'étudier les différents cas pour lesquels elle est susceptible d'apparaître.

5. Étude de la couche limite libre.

D'une façon générale, pour des problèmes elliptiques tels que le problème (1), une définition de la couche limite libre peut, *a priori*, être formulée de la façon suivante; soit Γ_0 une courbe contenue dans G , et soit G_0 un voisinage arbitraire de Γ_0 ne contenant pas Γ_0 , si

$$\Phi = O(\delta_0) \quad \text{sur } \Gamma_0, \quad \Phi = O(\delta) \quad \text{dans } G_0,$$

où δ et δ_0 sont des fonctions de jauge (en ε), une couche limite libre se « propage » le long de Γ_0 si δ et δ_0 ne sont pas comparables :

$$\delta_0 = o(\delta) \quad \text{ou} \quad \delta = o(\delta_0) \quad (2).$$

Une autre définition, introduisant la dérivée normale $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ le long de Γ_0 , aurait pu être donnée. Elle a été écartée, d'une part, pour exclure les fonctions rapidement oscillatoires, d'autre part, parce que l'étude de la dérivée d'un développement asymptotique est souvent un problème difficile.

Toutefois, une autre définition, compatible avec le problème considéré, peut être formulée. Cette définition, déjà plus précise, permet d'énumérer les conditions d'apparition de telles couches. La frontière Γ est séparée en deux parties, Γ_+ et Γ_- . Si en un point P de la frontière Γ , la droite $x = \text{Cte}$, dirigée dans le sens des y positifs, pénètre dans le domaine G , P appartient à Γ_- ; si ce n'est pas le cas, P appartient à Γ_+ . De façon plus précise, si $P(x, y) \in \Gamma$, alors $P(x, y) \in \Gamma_-$ si, Δy étant positif, $P(x, y + \Delta y) \in G$.

Par exemple, dans le cas du modèle précédemment envisagé, le domaine G est le demi-plan $y \geq 0$, et, la frontière Γ est entièrement une frontière Γ_- .

En référence [5] (théorème IV), il est démontré que, pour un problème du type (1), (2), la solution au voisinage de la frontière Γ_- ne présente pas l'aspect d'une couche limite. En d'autres termes, la première approximation que l'on envisage naturellement, est la solution $w_0(x, y)$ de l'équation réduite, obtenue en posant $\varepsilon = 0$, vérifiant les conditions portées par Γ_-

$$\frac{\partial w_0}{\partial y} = 0, \quad w_0(x, y)|_{\Gamma_-} = f_0(x, y)|_{\Gamma_-},$$

(2) Les symboles O et o sont les symboles habituels connus sous le nom de « notation de Landau ».

où

$$f_0(x, y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(x, y).$$

Par suite, si f_0 est suffisamment régulière et, si Γ est convexe, w_0 ne présente pas d'irrégularités. Par contre, si f_0 est discontinue ou à dérivée discontinue, ou bien, si Γ n'est pas convexe (fig. 1 et 2), alors, w_0 peut être discontinue, ou à dérivée discontinue dans G , le long des lignes $x = \text{Cte}$.

DÉFINITION. — Si $w_0(x, y)$ est la solution de l'équation réduite vérifiant les conditions réduites portées par Γ_- , on dit que, le long de la ligne $x = \text{Cte}$, la solution du problème global possède une couche limite libre :

d'ordre 0, si w_0 est discontinue le long de cette ligne,

d'ordre 1, si w_0 est à dérivée discontinue.

On remarque ainsi que pour ce problème, les couches limites libres ne peuvent être portées que par les subcaractéristiques de l'équation (1) (caractéristiques de l'équation réduite). Cette définition permet de reprendre d'une autre façon l'énumération des cas envisagés dans l'introduction.

(i) La frontière Γ est régulière et convexe, mais $f_0(x, y)$ est discontinue ou possède une dérivée discontinue le long de Γ ; si les discontinuités de f_0 se présentent aux points $P(x_i, y_i)$ ($i = 1, 2, \dots, N$), N couches limites libres, d'ordre 0 si f_0 est discontinue, d'ordre 1 si f_0 est à dérivée discontinue, se propagent le long des lignes $x = x_i$.

(ii) La frontière Γ est non régulière, mais convexe; on suppose que la tangente à la frontière Γ_- présente des discontinuités. Le problème se ramène alors au cas (i) précédent avec des couches limites libres d'ordre 1.

(iii) Le domaine G est non convexe; c'est, par exemple, le cas des figures 1 et 2. Pour la figure 1, la frontière Γ_- est composée des segments AB et CD ; d'après la définition, une couche limite libre d'ordre 0 se propage sur le segment CC' . De même, pour la figure 2, où Γ_- se compose des arcs de courbe $\widehat{AB}$ et $\widehat{CD}$, une couche limite libre d'ordre 0 se propage sur CC' .

Le cas un peu particulier suggéré par la figure 1 où un segment de subcaractéristique appartient à Γ , sera plus précisément étudié dans la suite. Toutefois, il est intéressant de se rendre compte, d'abord, de la cohérence de cette dernière définition, en examinant de façon systématique le modèle envisagé dans les paragraphes précédents.

On considère encore une fois le problème aux limites (1), (2) sous la forme :

$$(7) \quad L_\varepsilon[\Phi(x, y)] = 0; \quad \Phi(x, 0) = f(x),$$

où Φ est définie dans la région $y \geq 0$. La fonction $f(x)$ est supposée identiquement nulle pour x négatif; pour x positif, f possède toutes les conditions de régularité requises.

Soit alors $\Phi_0(x, y)$ la fonction donnée par

$$(25) \quad \Phi_0(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\varepsilon y}}}^{\infty} f(t\sqrt{2\varepsilon y} + x) \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt.$$

Posant

$$(26) \quad \Phi(x, y) = \Phi_0(x, y) + z_0(x, y),$$

il est facile de démontrer, compte tenu des paragraphes précédents, les résultats suivants :

si $f(0) = 0$, $|z_0(x, y)| = O(\varepsilon)$;

si $f(0) = f'(0) = 0$, $|z_0(x, y)| = O(\varepsilon^2)$.

De plus, on a vu que lorsque $f(0) \neq 0$, Φ_0 était une approximation asymptotique de Φ en dehors d'un voisinage arbitraire de l'origine. En particulier, pour $y > 0$,

si $f(0) \neq 0$, $|z_0(x, y)| = O(\varepsilon)$.

Finalement, si $f(0) \neq 0$, une couche limite libre d'ordre 0 est présente sur $x = 0$; si $f(0) = 0$ avec $f'(0) \neq 0$, une couche limite libre d'ordre 1 est présente sur $x = 0$.

En outre, si $f(0) = f'(0) = 0$, l'approximation asymptotique est du même ordre que celle obtenue au paragraphe 3 où l'on avait supposé en plus $f''(0) = 0$. Ce dernier résultat permet d'ailleurs l'amélioration des hypothèses de régularité faites sur f .

Si maintenant on évalue l'intégrale (25) pour εy petit, il vient sans difficulté,

$$\Phi_0(x, y) = \frac{f(x)}{2\sqrt{\pi\varepsilon y}} \int_{-x}^{\infty} \exp\left\{-\frac{u^2}{4\varepsilon y}\right\} du + \sqrt{\frac{\varepsilon y}{\pi}} f'(x) \exp\left\{-\frac{x^2}{4\varepsilon y}\right\} + O(\varepsilon y).$$

Par suite, pour $x \neq 0$, on retrouve bien

$$\Phi_0(x, y) = f(x) + O(\varepsilon y),$$

où $f(x)$ est la solution de l'équation réduite vérifiant les conditions aux limites imposées. Toutefois, pour $x = 0$, on a

$$\Phi_0(0, y) = \frac{f(0)}{2} + f'(0) \sqrt{\frac{\varepsilon y}{\pi}} + O(\varepsilon y);$$

par conséquent, $f(x)$ ne peut, pour $x = 0$, représenter une approximation asymptotique de la solution dans le cas où $f(0) \neq 0$. Lorsque $f(0) = 0$ avec $f'(0) \neq 0$, c'est-à-dire pour une couche limite libre d'ordre 1, on a

$$\Phi_0(x, y) = f(x) + O(\sqrt{\varepsilon y});$$

l'approximation ainsi obtenue n'est pas la meilleure. Ces résultats justifient, dans une certaine mesure, la définition « *a priori* » donnée au début de ce paragraphe.

Dans toutes ces évaluations, il est entendu que $f(x) \equiv 0$ pour $x < 0$; de plus, toutes les valeurs en zéro de f et de ses dérivées sont, par un abus de langage commode, définies à droite.

Il faut aussi insister sur le fait que ces résultats ne sont valables que pour εy petit, d'ailleurs, la couche limite libre est évanescence lorsque $y \rightarrow \infty$ et la singularité présente à l'origine influence un domaine de plus en plus étendu; il est alors nécessaire de considérer l'approximation (25) et non pas, celle donnée éventuellement par $f(x)$. Finalement, il faut remarquer que ce problème, traité complètement à titre d'exemple ne constitue pas seulement un modèle au sens académique du terme. En effet, outre les techniques de raccordement asymptotique utilisées qui sont susceptibles de se généraliser, cette étude a mis en évidence l'intérêt de l'équation parabolique qui gouverne, plus que l'équation réduite, la recherche des approximations asymptotiques de la solution.

Ainsi, des problèmes du type (ii) peuvent se traiter sans autres calculs. Si l'on prend, par exemple, le cas d'une discontinuité de la tangente à l'origine avec pour domaine :

$$x \leq 0, \quad y \geq 0; \quad x \geq 0, \quad y \geq mx,$$

et pour conditions aux limites

$$\Phi(x, 0) = 0 \quad \text{pour } x \leq 0, \quad \Phi(x, mx) = f(x) \quad \text{pour } x \geq 0,$$

alors, si $f(0) = 0$ et si $m \neq \infty$, les conditions pour $x \geq 0$, peuvent se ramener sur l'axe $y = 0$. En effet, la formule (25) donne

$$\Phi_0(x, mx) = f(x) + O(\varepsilon y).$$

Par suite, pour un domaine borné, les conditions sont remplies, sur la droite $y = mx$ à l'ordre de ε près et, une couche limite libre d'ordre 1 est mise en évidence. Le cas $m = \infty$ est exclu, la structure de la solution étant complètement différente [5].

6. Le problème de la marche.

On considère l'équation

$$(1) \quad \varepsilon \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right] - \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0,$$

où la fonction Φ est définie dans le domaine G , (fig. 3) :

- pour $x \geq 0, y \geq 0$;
- pour $x \leq 0, y \geq l$,

où l est un nombre positif arbitraire.

En outre, Φ doit vérifier les conditions aux limites :

$$(27) \quad \begin{cases} \Phi(x, 0) = 0 & \text{pour } x \geq 0, \\ \Phi(0, y) = g(y) & \text{pour } 0 \leq y \leq l, \\ \Phi(x, l) = f(x) & \text{pour } x \leq 0. \end{cases}$$

Les données aux limites sont supposées continues,

$$(28) \quad g(0) = 0; \quad f(0) = g(l).$$

De plus, les conditions de régularité nécessaires pour justifier les calculs formels qui vont suivre seront supposées remplies.

Dans le cas général, la solution de l'équation réduite, vérifiant les données portées par Γ_- , présente une discontinuité le long de la ligne $x = 0$; une couche limite libre d'ordre zéro est donc présente le long de cette ligne. Le problème que l'on se pose est de définir, au moins en première approximation, la structure de cette couche limite.

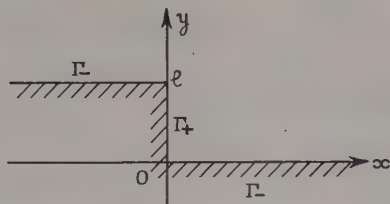


Fig. 3.

Le long de $x = 0$, on envisage pour $x \geq 0$, le développement d'une couche limite parabolique :

$$(29) \quad u_0(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\frac{x}{\sqrt{2\varepsilon y}}}^{\infty} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} \varphi\left(y - \frac{x^2}{2\varepsilon t^2}\right) dt,$$

u_0 étant une solution de l'équation parabolique

$$\varepsilon \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \frac{\partial u_0}{\partial y} = 0$$

vérifiant les conditions,

$$x \geq 0, \quad u_0(x, 0) = 0; \quad u_0(0, y) = \varphi(y).$$

Si $\varphi(y)$ est identifiée à $g(y)$ pour $0 \leq y \leq l$, le prolongement de u_0 dans la région $x \leq 0$, nécessite l'étude des dérivées en x de u_0 le long de $x = 0$.

Compte tenu de (28), il vient

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x}{\varepsilon} \int_{\frac{x}{\sqrt{2\varepsilon y}}}^{\infty} \frac{1}{t^2} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} \varphi'\left(\gamma - \frac{x^2}{2\varepsilon t^2}\right) dt,$$

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\frac{x}{\sqrt{2\varepsilon y}}}^{\infty} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} \varphi'\left(\gamma - \frac{x^2}{2\varepsilon t^2}\right) dt.$$

Alors, si pour $y > l$, $\varphi'(y) = 0$, on en déduit

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = 0 \quad \text{pour } x = 0.$$

Donc, si la fonction u_0 est prolongée, pour $x \leq 0$, par la fonction constante $g(l)$, la fonction encore notée u_0 , définie comme suit, est continue et deux fois dérivable dans G :

$$(30) \quad \begin{cases} u_0(x, \gamma) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\frac{x}{\sqrt{2\varepsilon y}}}^{\infty} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} \varphi\left(\gamma - \frac{x^2}{2\varepsilon t^2}\right) dt & \text{pour } x \geq 0, \\ u_0(x, \gamma) = g(l) & \text{pour } x \leq 0, \\ \varphi(\gamma) = \begin{cases} g(\gamma), & 0 \leq \gamma \leq l, \\ g(l), & l \leq \gamma. \end{cases} \end{cases}$$

Posant maintenant,

$$\Phi(x, \gamma) = u_0(x, \gamma) + \bar{\Phi}(x, \gamma).$$

Le problème pour $\bar{\Phi}$ s'écrit

$$\varepsilon \left[\frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial y^2} \right] - \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} = -\varepsilon \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2},$$

avec, pour conditions aux limites,

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(x, l) &= f(x) - g(l) & \text{pour } x \leq l, \\ \bar{\Phi}(x, 0) &= 0, \quad x \geq 0; & \bar{\Phi}(0, \gamma) = 0, \quad 0 \leq \gamma \leq l. \end{aligned}$$

Il apparaît donc naturel de considérer la fonction

$$(31) \quad v_0(x, \gamma) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon(\gamma-l)}} \int_{-\infty}^0 [f(t) - g(l)] \exp\left\{-\frac{(x-t)^2}{4\varepsilon(\gamma-l)}\right\} dt,$$

définie pour $y \geq l$ et solution de l'équation

$$\varepsilon \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} - \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0.$$

La fonction $v_0(x, y)$ peut, formellement s'écrire

$$v_0(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{x}{\sqrt{2\varepsilon(y-l)}}} \{f(t\sqrt{2\varepsilon(y-l)} + x) - g(l)\} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt.$$

Sous cette forme, on constate facilement :

- pour $x \leq 0$, $v_0(x, l) = f(x) - g(l)$;
- pour $x \geq 0$, $v_0(x, l) = 0$.

De la même façon que précédemment, l'étude des dérivées en y , pour $y = l$, permet de prolonger cette fonction dans la région $y \leq l$; en effet,

$$\frac{\partial v_0}{\partial y} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{y-l}} \int_{-\infty}^{-\frac{x}{\sqrt{2\varepsilon(y-l)}}} t f'(t\sqrt{2\varepsilon(y-l)} + x) \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt,$$

et, après calculs,

$$(32) \quad \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} = \frac{\varepsilon^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{\pi}(y-l)} \int_{-\infty}^{-\frac{x}{\sqrt{2\varepsilon(y-l)}}} t \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} f'''(t\sqrt{2\varepsilon(y-l)} + x) dt \\ + \exp\left\{-\frac{x^2}{4\varepsilon(y-l)}\right\} \left[\frac{1}{4} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\pi}} \frac{f'(0)}{(y-l)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{8} \frac{f'(0)}{\sqrt{\varepsilon\pi}} \frac{x^2}{(y-l)^{\frac{5}{2}}} \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\pi}} \frac{x f''(0)}{(y-l)^{\frac{3}{2}}} \right].$$

Ainsi, pour $y = l$ et x strictement positif,

$$\frac{\partial v_0}{\partial y} = \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} = 0.$$

Par suite, la fonction encore notée $v_0(x, y)$, définie par

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_0(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{x}{\sqrt{2\varepsilon(y-l)}}} [f(t\sqrt{2\varepsilon(y-l)} + x) - g(l)] \\ \quad \times \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt, \quad y \geq l, \\ v_0(x, y) = 0 \quad \text{pour } y \leq l, \end{array} \right.$$

est une fonction continue dans le domaine considéré et est deux fois dérivable dans l'intérieur de celui-ci si f est de classe C_3 . Posant finalement,

$$(34) \quad \Phi(x, y) = u_0(x, y) + v_0(x, y) + z_0(x, y),$$

le problème pour $z_0(x, y)$ s'écrit :

$$(35) \quad \varepsilon \left[\frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2} \right] - \frac{\partial z_0}{\partial y} = -\varepsilon \left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \right],$$

où z_0 est nul sur les frontières du domaine considéré. Compte tenu de (30) et de (33), il n'y a aucune ambiguïté sur la définition du second membre de l'équation. On a

$$(36) \quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \frac{g'(0)}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{x}{(2y)^{\frac{3}{2}}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{4\varepsilon y} \right\} + \int_{\frac{x}{\sqrt{2\varepsilon y}}}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{t^2}{2} \right\} \varphi'' \left(y - \frac{x^2}{2\varepsilon t^2} \right) dt \right\},$$

et $\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}$ est déjà exprimé par la relation (32). Le problème ainsi posé est analogue au problème (18) (§ 4).

LEMME. — Si $f'(0) = 0$ et si, de plus,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f'''(t)| dt = O(\varepsilon^{\mu}), \quad |f''(0)| = O(\varepsilon^{\nu}),$$

$g(y)$ étant indépendant de ε , alors, uniformément,

$$|z_0(x, y)| = O(\varepsilon^{\min[1, 2 + \min(\mu, \nu)]}).$$

Pour démontrer ce lemme, on applique le théorème d'estimation 2; à cet effet, il faut poser

$$\begin{aligned} \bar{h}_1(x, y) &= \frac{\varepsilon^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{\pi}(y-l)} \int_{-\infty}^{-\frac{x}{\sqrt{2\varepsilon(y-l)}}} |t| \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{t^2}{2} \right\} |f'''(t\sqrt{2\varepsilon(y-l)} + x)| dt, \quad y \geq l, \\ \bar{h}_2(x, y) &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} \frac{|x| \cdot |g'(0)|}{y^{\frac{3}{2}}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{4\varepsilon y} \right\}, \quad x \geq 0, \\ \bar{h}_3(x, y) &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\pi}} \frac{|x| \cdot |f''(0)|}{(y-l)^{\frac{3}{2}}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{4\varepsilon(y-l)} \right\}, \quad y \geq l, \\ \bar{h}_4(x, y) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\frac{x}{\sqrt{2\varepsilon y}}}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{t^2}{2} \right\} \left| \varphi'' \left(y - \frac{x^2}{2\varepsilon t^2} \right) \right| dt, \quad x \geq 0, \end{aligned}$$

et, estimer les intégrales,

$$\bar{Z}_i(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint_G \exp \left\{ -\frac{\eta - y}{2\varepsilon} \right\} K_0 \left[\frac{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}}{2\varepsilon} \right] \bar{h}_i(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

où G est le domaine considéré, i varie de 1 à 4.

En Appendice I, on démontre qu'il existe quatre nombres positifs $\bar{B}_1$, $\bar{B}_2$, $\bar{B}_3$ et $\bar{B}_4$, indépendants de ε , tels que

$$\bar{Z}_1(x, y) < \bar{B}_1 \varepsilon^2 \int_{-\infty}^0 |f'''(t')| dt', \quad \bar{Z}_3(x, y) < \bar{B}_3 \varepsilon^2 |f''(0)|,$$

$$\bar{Z}_2(x, y) < \bar{B}_2 \varepsilon |g'(0)|, \quad \bar{Z}_4(x, y) < \bar{B}_4 \varepsilon,$$

cette dernière inégalité n'est valable que si φ est de classe C_2 et est indépendante de ε . L'application du théorème 2 est alors immédiate et conduit bien au résultat annoncé.

Dans le cas général où $f'(0) \neq 0$, on se ramène, comme précédemment dans le cadre du lemme, en régularisant les données. On considère la fonction

$$(37) \quad \bar{f}(x) = f(x) - x \exp \left\{ \frac{x}{\varepsilon} \right\} f'(0) \quad \text{pour } x \leq 0;$$

cette relation implique,

$$\bar{f}(0) = f(0) = g(l); \quad \bar{f}'(0) = 0.$$

On définit ensuite la couche limite régularisée,

$$(38) \quad \bar{v}_0(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{x}{\sqrt{2\varepsilon(y-l)}}} [\bar{f}(t \sqrt{2\varepsilon(y-l)} + x) - g(l)] \exp \left\{ -\frac{t^2}{2} \right\} dt.$$

Cette fonction $\bar{v}_0$, est solution de la même équation que v_0 , et vérifie en $y = l$, les conditions

$$(39) \quad \begin{cases} \text{pour } x \leq 0, & \bar{v}_0(x, l) = f(x) - g(l) - x \exp \left\{ \frac{x}{\varepsilon} \right\} f'(0), \\ \text{pour } x \geq 0, & \bar{v}_0(x, l) = 0. \end{cases}$$

Si l'on pose

$$(40) \quad \Phi(x, y) = u_0(x, y) + \bar{v}_0(x, y) + \bar{z}_0(x, y),$$

le problème pour $\bar{z}_0(x, y)$ s'écrit :

$$(41) \quad \varepsilon \left[\frac{\partial^2 \bar{z}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{z}_0}{\partial y^2} \right] - \frac{\partial \bar{z}_0}{\partial y} = -\varepsilon \left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_0}{\partial y^2} \right],$$

les conditions aux limites se réduisant à

$$(42) \quad \bar{z}_0(x, l) = x \exp \left\{ \frac{x}{\varepsilon} \right\} f'(0), \quad x \leq 0.$$

Le second membre de l'équation est toujours donné par les relations (32) et (36), mais cette fois, $\bar{f}'(0) = 0$. De plus, on remarque que les conditions aux limites sont au plus de l'ordre de ε . Enfin, il est facile de voir que, si $f(x)$ est indépendant de ε ,

$$\int_{-\infty}^0 |\bar{f}'''(t')| dt' = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \quad |\bar{f}''(0)| = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Finalement, le problème étant linéaire, l'application du lemme jointe à celle du théorème 2 conduit au résultat

$$|\bar{z}_0(x, y)| = O(\varepsilon).$$

Revenant maintenant à la définition de $\bar{v}_0(x, y)$, on trouve aisément,

$$(43) \quad \bar{v}_0(x, y) = v_0(x, y) + O(\varepsilon).$$

Par suite, la comparaison des relations (34) et (40) donne le résultat final

$$|z_0(x, y)| = O(\varepsilon).$$

Ces résultats sont, bien sûr, tout à fait analogues à ceux du paragraphe 4, en particulier, si $g(y)$ et $f'(0)$ sont nuls,

$$|z_0(x, y)| = O(\varepsilon^2).$$

Sans raffiner les conditions de régularité des données, on peut énoncer le résultat suivant :

THÉORÈME 5. — Si $\Phi(x, y)$ est la solution du problème (1), (27) dans le domaine $G[x \geq 0, y \geq 0; x \leq 0, y \leq l]$, et si f est de classe C_3 avec $|f''|$ intégrable, g est de classe C_2 , alors, uniformément dans le domaine considéré,

$$\Phi(x, y) = u_0(x, y) + v_0(x, y) + O(\varepsilon),$$

où u_0 et v_0 sont données par les expressions (30) et (33).

De plus, si $g(y)$ et $f'(0)$ sont nuls,

$$\Phi(x, y) = v_0(x, y) + O(\varepsilon^2).$$

On peut encore une fois remarquer qu'en dehors d'un voisinage arbitraire de la ligne $x = 0$,

$$\Phi(x, y) = f(x) + O(\varepsilon y) \quad (x < 0),$$

tandis que, au même ordre de grandeur près, Φ est nul pour $x > 0$.

Cette dernière étude, liée à celles effectuées précédemment, permet de traiter un assez grand nombre de configurations et d'envisager ainsi des applications intéressantes en Physique mathématique.

7. Conclusion.

Dans les paragraphes précédents, deux problèmes différents ont été abordés simultanément; le problème posé par un domaine non borné d'une part, et, celui de la couche limite libre d'autre part. Le fait que ces deux problèmes se rejoignent dans une certaine mesure, du point de vue de la structure des solutions, présente un intérêt certain. En particulier, cela montre que le processus utilisant l'équation de la chaleur est la méthode appropriée à ce type de problème et non le processus consistant à itérer sur l'équation réduite. De plus, les solutions mises en évidence ont un aspect beaucoup plus simple que pour un domaine borné où il est nécessaire d'introduire d'autres termes dus à la présence des parois.

Ces problèmes peuvent être considérés comme des modèles, pour ce type d'équation, car leur formulation est assez simple; en particulier pour le problème du demi-plan où la solution exacte est connue. Toutefois, les méthodes mises en œuvre présentent un caractère assez général pour essayer de les adapter à d'autres problèmes aux limites.

Il faut finalement remarquer que les problèmes posés par des domaines tels que celui de la figure 2 n'ont pas été abordés; ils sont en effet suffisamment complexes pour faire l'objet d'une étude particulière. Très peu d'études ont d'ailleurs été publiées sur ce sujet jusqu'à maintenant. On peut citer L. Todd [11] qui étudie l'écoulement d'un fluide conducteur dans une conduite annulaire, mais les résultats obtenus ne sont pas mathématiquement justifiés. En référence [12], une étude du voisinage du point C (fig. 2) a été faite, mais il reste le problème de la couche limite libre issue de cette singularité. Des résultats intéressants, qui feront l'objet d'une publication ultérieure, ont déjà été obtenus sur ce point.

APPENDICE I.

Estimation des diverses intégrales.

1. Intégrale intermédiaire $J(y)$.

Pour estimer la plupart des intégrales nécessaires aux estimations asymptotiques, il faut estimer l'intégrale intermédiaire,

$$J(y) = \int_Y^\infty \frac{\exp\left\{-\frac{\eta - y}{2\varepsilon}\right\}}{\sqrt{\eta - Y}} K_0\left[\frac{|\eta - y|}{2\varepsilon}\right] d\eta,$$

avec $y \geq 0$ et $Y \geq 0$.

Premier cas : $0 \leq y \leq Y$. — Cette hypothèse entraîne $\eta \geq y$; par suite,

$$J(y) = \int_Y^\infty \frac{\exp\left\{-\frac{\eta-y}{2\varepsilon}\right\}}{\sqrt{\eta-Y}} K_0\left[\frac{\eta-y}{2\varepsilon}\right] d\eta = 2\varepsilon \int_{\eta=Y}^\infty \frac{e^{-u} K_0(u)}{\sqrt{2\varepsilon u + y - Y}} du.$$

Posant $k = \frac{Y-y}{2\varepsilon}$, $J(y)$ s'écrit encore

$$J(y) = \sqrt{2\varepsilon} \int_k^\infty \frac{e^{-u} K_0(u)}{\sqrt{u-k}} du,$$

intégrale manifestement convergente et bornée indépendamment de k .

Deuxième cas : $0 \leq Y \leq y$. — Il est alors naturel de séparer l'intégration en deux parties :

$$J(y) = \int_Y^y \frac{\exp\left\{-\frac{\eta-y}{2\varepsilon}\right\}}{\sqrt{\eta-Y}} K_0\left[\frac{y-\eta}{2\varepsilon}\right] d\eta + \int_y^\infty \frac{\exp\left\{-\frac{\eta-y}{2\varepsilon}\right\}}{\sqrt{\eta-Y}} K_0\left[\frac{\eta-y}{2\varepsilon}\right] d\eta.$$

Ceci permet, après un changement de variable dans chaque intégrale, d'arriver sans difficulté à la majoration :

$$J(y) < \sqrt{2\varepsilon} \int_0^k \frac{e^u K_0(u)}{\sqrt{k-u}} du + \sqrt{2\varepsilon} \int_0^\infty \frac{e^{-u} K_0(u)}{\sqrt{u}} du,$$

où l'on a posé cette fois $k = \frac{y-Y}{2\varepsilon}$. Ces deux dernières intégrales sont bornées indépendamment de ε . Finalement, dans les deux cas, pour $y \geq 0$ et $Y \geq 0$, il existe un nombre positif A , indépendant de ε , tel que

$$J(y) < A \sqrt{\varepsilon}.$$

2. Estimation des intégrales Z_0 , Z_1 et $\bar{Z}_1$.

On considère

$$J_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\eta \geq Y} \exp\left\{-\frac{\eta-y}{2\varepsilon}\right\} K_0\left[\frac{\sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2}}{2\varepsilon}\right] H_1(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

avec

$$H_1(\xi, \eta) = \frac{\varepsilon^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{\pi(\eta-Y)}} \int_{\frac{x_1-\xi}{\sqrt{2\varepsilon(\eta-Y)}}}^{\frac{x_2-\xi}{\sqrt{2\varepsilon(\eta-Y)}}} |t| \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} \mu(t\sqrt{2\varepsilon(\eta-Y)} + \xi) dt,$$

où $\mu(x)$ est une fonction positive et intégrable définie pour $X_1 \leq x \leq X_2$. Compte tenu des propriétés de décroissance de K_0 ,

$$J_1(x, y) < \frac{1}{2\pi} \int_{\eta=Y}^{\infty} \left[\exp \left\{ -\frac{\eta-y}{2\varepsilon} \right\} K_0 \left(\frac{|\eta-y|}{2\varepsilon} \right) \int_{-\infty}^{\infty} H_1(\xi, \eta) d\xi \right] d\eta.$$

Un premier changement de variable de t en t' , $t\sqrt{2\varepsilon(\eta-Y)} + \xi = t'$, conduit à

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} H_1(\xi, \eta) d\xi &\leq \frac{\varepsilon^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{\pi(\eta-Y)}} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} \int_{t'=X_1}^{X_2} \left| \frac{t'-\xi}{\sqrt{2\varepsilon(\eta-Y)}} \right| \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{(t'-\xi)^2}{4\varepsilon(\eta-Y)} \right\} \mu(t') \frac{dt'}{\sqrt{2\varepsilon(\eta-Y)}} d\xi. \end{aligned}$$

Un second changement de variable de ξ en t , $\frac{\xi-t'}{\sqrt{2\varepsilon(\eta-Y)}} = t$, donne

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_1(\xi, \eta) d\xi \leq \frac{\varepsilon^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{\pi(\eta-Y)}} \int_{t=-\infty}^{\infty} \int_{t'=X_1}^{X_2} |t| \exp \left\{ -\frac{t^2}{2} \right\} \mu(t') dt dt',$$

ce qui conduit finalement à

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_1(\xi, \eta) d\xi \leq 2\pi B'_1 \frac{\varepsilon^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\eta-Y}} \int_{X_1}^{X_2} \mu(t') dt'$$

où B'_1 est un nombre positif indépendant de ε .

Compte tenu de l'expression de l'intégrale intermédiaire $J(y)$, il vient,

$$J_1(x, y) < B'_1 \varepsilon^{\frac{3}{2}} J(y) \int_{X_1}^{X_2} \mu(t') dt'.$$

Donc, il existe un nombre positif B_1 , indépendant de ε , tel que

$$J_1(x, y) < B_1 \varepsilon^2 \int_{X_1}^{X_2} \mu(t') dt'.$$

Intégrale Z_0 :

$$Z_0(x, y) = J_1(x, y),$$

avec $X_1 = -\infty$, $X_2 = +\infty$, $Y = 0$; en outre,

$$\mu(t') = |f'''(t')|,$$

fonction qui a été supposée intégrable. Il existe donc un nombre positif C , indépendant de ε , tel que

$$Z_0(x, y) < C\varepsilon^2.$$

Intégrale Z_1 :

$$Z_1(x, y) = J_1(x, y),$$

avec $X_1 = 0$, $X_2 = +\infty$, $Y = 0$. Pour ces mêmes valeurs, on a en outre

$$h_1(x, y) = H_1(x, y).$$

De plus, $\mu(t') = |\bar{f}'''(t')|$, donc

$$Z_1(x, y) < B_1 \varepsilon^2 \int_0^\infty |\bar{f}'''(t')| dt'.$$

Intégrale $\bar{Z}_1$. — Dans les mêmes conditions, il vient pour $\bar{Z}_1$,

$$\bar{Z}_1(x, y) < \bar{B}_1 \varepsilon^2 \int_{-\infty}^0 |\bar{f}'''(t')| dt'.$$

3. Estimation des intégrales Z_2 , $\bar{Z}_2$ et $\bar{Z}_3$.

On considère

$$J_2(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\eta \geq Y} \exp\left\{-\frac{\eta - y}{2\varepsilon}\right\} K_0\left[\frac{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}}{2\varepsilon}\right] H_2(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

avec

$$H_2(\xi, \eta) = \frac{\alpha}{4\sqrt{\pi\varepsilon}} \frac{|\xi|}{(\eta - Y)^{\frac{3}{2}}} \exp\left\{-\frac{\xi^2}{4\varepsilon(\eta - Y)}\right\},$$

où α , y et Y sont supposés positifs ou nuls.

De la même façon que pour les intégrales précédentes, il est possible d'écrire

$$J_2(x, y) < \frac{\alpha}{8\pi\sqrt{\pi\varepsilon}} \int_{\eta=Y}^\infty \left[\exp\left\{-\frac{\eta - y}{2\varepsilon}\right\} K_0\left(\frac{|\eta - y|}{2\varepsilon}\right) \times \int_{\xi=-\infty}^\infty \frac{|\xi|}{(\eta - Y)^{\frac{3}{2}}} \exp\left\{-\frac{\xi^2}{4\varepsilon(\eta - Y)}\right\} d\xi \right] d\eta.$$

L'intégration en ξ est immédiate,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^\infty |\xi| \exp\left\{-\frac{\xi^2}{4\varepsilon(\eta - Y)}\right\} d\xi \\ &= \left[-4\varepsilon(\eta - Y) \exp\left\{-\frac{\xi^2}{4\varepsilon(\eta - Y)}\right\} \right]_{\xi=0}^\infty = 4\varepsilon(\eta - Y), \end{aligned}$$

par suite,

$$J_2(x, y) < \frac{\alpha}{2\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\pi}} J(y),$$

où $J(y)$ est l'intégrale intermédiaire précédemment étudiée. Il existe donc un nombre positif B'_2 , indépendant de ε , tel que

$$J_2(x, y) < B'_2 \alpha \varepsilon.$$

Intégrale Z_2 . — Pour $\alpha = \varepsilon |\bar{f}''(0)|$ et $Y = 0$, on a

$$h_2(x, y) = H_2(x, y), \quad \text{donc} \quad Z_2(x, y) = J_2(x, y).$$

Par suite, il existe un nombre positif B_2 , indépendant de ε , tel que

$$Z_2(x, y) < B_2 \varepsilon^2 |\bar{f}''(0)|.$$

Intégrale $\bar{Z}_2$. — Pour $\alpha = 2 |g'(0)|$ et $Y = 0$, on a

$$\bar{h}_2(x, y) = H_2(x, y),$$

donc, compte tenu du domaine d'intégration,

$$\bar{Z}_2(x, y) < J_2(x, y).$$

Il existe un nombre positif $\bar{B}_2$, indépendant de ε , tel que

$$\bar{Z}_2(x, y) < \bar{B}_2 \varepsilon |g'(0)|.$$

Intégrale $\bar{Z}_3$. — Pour $\alpha = \varepsilon |\bar{f}''(0)|$ et $Y = l$, on a

$$\bar{h}_3(x, y) = H_2(x, y), \quad \text{donc} \quad \bar{Z}_3(x, y) = J_2(x, y).$$

Par suite, dans le domaine considéré, il existe un nombre positif $\bar{B}_3$, indépendant de ε , tel que

$$\bar{Z}_3(x, y) < \bar{B}_3 \varepsilon^2 |\bar{f}''(0)|.$$

4. Estimation de l'intégrale $\bar{Z}_4$.

Soit

$$\bar{Z}_4(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\substack{\xi \geq 0 \\ \eta \geq 0}} \exp \left\{ -\frac{\eta - y}{2\varepsilon} \right\} K_0 \left[\frac{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}}{2\varepsilon} \right] \bar{h}_4(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

avec,

$$\bar{h}_4(\xi, \eta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\frac{\xi}{\sqrt{2\varepsilon\eta}}}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{t^2}{2} \right\} \left| \varphi'' \left(\eta - \frac{\xi^2}{2\varepsilon t^2} \right) \right| dt.$$

Le changement de variable $\eta - \frac{\xi^2}{2\varepsilon t^2} = u$, changeant t en u , donne, compte tenu des propriétés de décroissance de K_0 ,

$$\begin{aligned} \bar{Z}_4(x, y) &< \frac{1}{\pi \sqrt{2\pi\varepsilon}} \int_{\eta=0}^{\infty} \left[\exp \left\{ -\frac{\eta - y}{2\varepsilon} \right\} K_0 \left(\frac{|\eta - y|}{2\varepsilon} \right) \right. \\ &\quad \times \int_{\xi=0}^{\infty} \int_{u=0}^{\eta} \frac{\xi}{[2(\eta - u)]^{\frac{3}{2}}} \\ &\quad \left. \times \exp \left\{ -\frac{\xi^2}{4\varepsilon(\eta - u)} \right\} |\varphi''(u)| du d\xi \right] d\eta. \end{aligned}$$

Si l'on remarque que

$$\int_{\xi=0}^{\infty} \frac{\xi}{2\varepsilon(\eta-u)} \exp\left\{-\frac{\xi^2}{4\varepsilon(\eta-u)}\right\} d\xi \leq 1,$$

il vient :

$$\bar{Z}_4(x, y) < \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\pi}} \int_{\eta=0}^{\infty} \left[\exp\left\{-\frac{\eta-y}{2\varepsilon}\right\} K_0\left(\frac{|\eta-y|}{2\varepsilon}\right) \int_{u=0}^{\eta} \frac{|\varphi''(u)|}{\sqrt{\eta-u}} du \right] d\eta.$$

Il faut maintenant estimer l'intégrale

$$K(\eta) = \int_0^{\eta} \frac{|\varphi''(u)|}{\sqrt{\eta-u}} du.$$

Si $|\varphi''(u)|$ est une fonction continue et bornée sur un intervalle fini, ce qui est ici le cas, $K(\eta)$ est majoré par une fonction telle que $\frac{M}{\sqrt{\eta}}$.

On peut montrer qu'il en est de même lorsque $|\varphi''(u)|$ est supposée intégrable sur la demi-droite. L'intégrale $K(\eta)$ est bornée indépendamment de η , mais son comportement pour η grand est nécessaire. Or, sous ces hypothèses, $|\varphi''(u)|$ peut être majorée par une fonction positive et intégrable $\lambda(u)$, décroissante pour u suffisamment grand. Donc, η_0 défini par

$$\lambda(\eta_0) = \frac{1}{\eta}$$

existe et est unique pour η assez grand. De plus, si

$$\eta_0 \rightarrow \infty, \quad \eta_0 \lambda(\eta_0) \rightarrow 0,$$

ou encore, si

$$\eta \rightarrow \infty, \quad \frac{\eta_0}{\eta} \rightarrow 0.$$

L'intégrale $K(\eta)$ est alors décomposée en deux parties :

$$K(\eta) < \int_0^{\eta} \frac{\lambda(u)}{\sqrt{\eta-u}} du = \int_0^{\eta_0} \frac{\lambda(u)}{\sqrt{\eta-u}} du + \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{\lambda(u)}{\sqrt{\eta-u}} du;$$

l'application du théorème de la moyenne donne

$$K(\eta) < \frac{1}{\sqrt{\eta-\eta_0}} \int_0^{\eta_0} \lambda(u) du + \lambda(\eta_0) \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{du}{\sqrt{\eta-u}}.$$

Par suite, il existe un nombre positif M_1 , indépendant de η , tel que

$$K(\eta) < \frac{M_1}{\sqrt{\eta-\eta_0}} + 2\lambda(\eta_0) \sqrt{\eta-\eta_0},$$

et, toujours pour η assez grand,

$$K(\eta) < \frac{M_1}{\sqrt{\eta}} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\eta_0}{\eta}}} + \frac{2}{M_1} \eta \lambda(\eta_0) \sqrt{1 - \frac{\eta_0}{\eta}} \right] < \frac{M}{\sqrt{\eta}},$$

où M est un nombre positif, suffisamment grand, et, indépendant de η .

Finalement,

$$\bar{Z}_4(x, \gamma) < \frac{M}{2\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\pi}} J(\gamma),$$

où $J(y)$ est l'intégrale intermédiaire déjà étudiée. Il existe donc un nombre positif $\bar{B}_4$, indépendant de ε , tel que

$$\bar{Z}_4(x, \gamma) < \bar{B}_4 \varepsilon.$$

APPENDICE II.

Solution du problème (i).

On considère le problème

$$(i) \quad \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y_1^2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} = 0, \quad \varphi_1(x_1, 0) = Y(x_1).$$

Si l'on pose

$$\varphi_1(x_1, y_1) = \exp\left\{\frac{y_1}{2}\right\} V(x_1, y_1),$$

il vient

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2} - \frac{V}{4} = 0, \quad V(x_1, 0) = Y(x_1).$$

La fonction de Green associée à un tel problème s'écrit

$$G(x_1, y_1; \xi_1, \eta_1) = K_0\left(\frac{R_1}{2}\right) - K_0\left(\frac{R_1^*}{2}\right),$$

avec

$$R_1 = \{(x_1 - \xi_1)^2 + (y_1 - \eta_1)^2\}^{\frac{1}{2}},$$

$$R_1^* = \{(x_1 - \xi_1)^2 + (y_1 + \eta_1)^2\}^{\frac{1}{2}},$$

où K_0 est la fonction de Bessel modifiée de 3^e espèce [9]. La solution est alors donnée pour le demi-plan $y_1 \geq 0$, par

$$V(x_1, y_1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\partial G}{\partial \eta_1} \Big|_{\eta_1=0} d\xi_1 = \frac{y_1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{K_1\left(\frac{r_1}{2}\right)}{r_1} d\xi_1,$$

avec

$$r_1 = \{ (x_1 - \xi)^2 + y_1^2 \}^{\frac{1}{2}}.$$

Finalement, pour φ_1 , il vient

$$\varphi_1(x_1, y_1) = \frac{1}{2\pi} y_1 \exp \left\{ \frac{y_1}{2} \right\} \int_0^\infty \frac{K_1 \left(\frac{r_1}{2} \right)}{r_1} d\xi_1.$$

APPENDICE III.

Condition de raccordement asymptotique.

1. Considérons

$$\varphi_0(x_\mu \varepsilon^\mu, y_\nu \varepsilon^\nu) = \frac{1}{2\sqrt{\pi} y_\nu \varepsilon^{\nu+1}} \int_0^\infty f(t) \exp \left\{ -\frac{(t - x_\mu \varepsilon^\mu)^2}{4 y_\nu \varepsilon^{\nu+1}} \right\} dt.$$

Un changement de variable justifié par les hypothèses de régularité faites sur f conduit à

$$\varphi_0(x_\mu \varepsilon^\mu, y_\nu \varepsilon^\nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x_\mu \varepsilon^\mu}{2\sqrt{y_\nu \varepsilon^{\nu+1}}}}^\infty f(2u\sqrt{y_\nu \varepsilon^{\nu+1}} + x_\mu \varepsilon^\mu) \exp \{ -u^2 \} du.$$

Donc, compte tenu du fait que $f(0) = 1$, il vient

$$\lim_{\substack{\varepsilon > 0 \\ 2\mu = \nu + 1 \\ 0 < \nu < 1}} \varphi_0(x_\mu \varepsilon^\mu, y_\nu \varepsilon^\nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x_\mu}{2\sqrt{y_\nu}}}^\infty \exp \{ -u^2 \} du = -\varphi_2(x, y).$$

2. Considérons

$$\tilde{\varphi}_1(x_\mu \varepsilon^{\mu-1}, y_\nu \varepsilon^{\nu-1}) = \frac{y_\nu \varepsilon^{\nu-1} \exp \left\{ \frac{y_\nu \varepsilon^{\nu-1}}{2} \right\}}{2\pi} \int_0^\infty \frac{K_1 \left(\frac{r_1}{2} \right)}{r_1} d\xi_1,$$

avec

$$r_1 = \{ (x_\mu \varepsilon^{\mu-1} - \xi_1)^2 + y_\nu^2 \varepsilon^{2\nu-2} \}^{\frac{1}{2}}.$$

Le processus limite envisagé implique r_1 grand; par suite,

$$K_1 \left(\frac{r_1}{2} \right) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{r_1}} \exp \left\{ -\frac{r_1}{2} \right\}$$

et, par conséquent, le point au voisinage duquel l'intégrale donnera la plus grande contribution est donné par

$$\xi_1 = \xi_c = x_\mu \varepsilon^{\mu-1}.$$

Il faut maintenant développer l'intégrant au voisinage de ce point; pour $\xi_1 = \xi_c$,

$$r_1 = \gamma_v \varepsilon^{v-1}, \quad \frac{\partial r_1}{\partial \xi_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 r_1}{\partial \xi_1^2} = \frac{1}{\gamma_v \varepsilon^{v-1}}.$$

Posant alors,

$$r_1^* = r_1 \Big|_{\xi_1 = \xi_c} + (x_\mu \varepsilon^{|\mu|-1} - \xi_1) \frac{\partial r_1}{\partial \xi_1} \Big|_{\xi_1 = \xi_c} + \frac{(x_\mu \varepsilon^{|\mu|-1} - \xi_1)^2}{2} \frac{\partial^2 r_1}{\partial \xi_1^2} \Big|_{\xi_1 = \xi_c},$$

on obtient

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ 2|\mu| = v+1 \\ 0 < v < 1}} \tilde{\Phi}_1(x_\mu \varepsilon^{|\mu|-1}, \gamma_v \varepsilon^{v-1}) = \frac{\exp \left\{ \frac{\gamma_v \varepsilon^{v-1}}{2} \right\}}{2 \sqrt{\pi \gamma_v \varepsilon^{v-1}}} \int_0^\infty \exp \left\{ -\frac{r_1^*}{2} \right\} d\xi_1,$$

avec

$$r_1^* = \gamma_v \varepsilon^{v-1} + \frac{(x_\mu \varepsilon^{|\mu|-1} - \xi_1)^2}{2 \gamma_v \varepsilon^{v-1}}.$$

D'où,

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ 2|\mu| = v+1 \\ 0 < v < 1}} \tilde{\Phi}_1(x_\mu \varepsilon^{|\mu|-1}, \gamma_v \varepsilon^{v-1}) = \frac{1}{2 \sqrt{\pi \gamma_v \varepsilon^{v-1}}} \int_0^\infty \exp \left\{ -\frac{(\xi_1 - x_\mu \varepsilon^{|\mu|-1})^2}{4 \gamma_v \varepsilon^{v-1}} \right\} d\xi_1.$$

Après un changement de variable, on obtient finalement le résultat cherché :

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ 2|\mu| = v+1 \\ 0 < v < 1}} \tilde{\Phi}_1(x_\mu \varepsilon^{|\mu|-1}, \gamma_v \varepsilon^{v-1}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x_\mu}{2\sqrt{\gamma_v}}}^\infty \exp \{ -u^2 \} du = -\varphi_2(x, \gamma).$$

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] SHERCLIFF J. A., *Magnetohydrodynamic pipe flow* (*J. Fluid. Mech.*, vol. 13, Part 4, 1962, p. 513-518).
- [2] CHIANG D. et LUNDGREEN T., *Magnetohydrodynamic flow in a rectangular duct with perfectly conducting electrodes* (*Z. A. M. P.*, vol. 18, n° 1, 1967, p. 314-328).
- [3] JONES J. R. et WALTERS T. S., *A note on the motion of a viscous liquid in a rotating straight pipe* (*Z. A. M. P.*, vol. 18, n° 6, 1969, p. 774-781).
- [4] VISIK M. I. et LYUSTERNIK L. A., *Regular degeneration and boundary layer for linear differential equations with small parameter* (*Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 12, 1957; *Amer. Math. Soc. Trans.*, série 2, vol. 20, 1962).
- [5] ECKHAUS W. et DE JAGER E. M., *Asymptotic solutions of singular perturbation problems for linear differential equations of elliptic type* (*Arch. Rat. Mech. Anal.*, vol. 23, n° 1, 1966, p. 26-86).
- [6] MAUSS J., *Étude des solutions asymptotiques de problèmes aux limites elliptiques pour des domaines non bornés* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 269, série A, 1969, p. 25-28).

- [7] ECKHAUS W., *On the structure of certain asymptotic boundary layers*, Mathematisch Instituut der Technische Hogeschool, Delft, Nederland, 1968.
- [8] PROTTER M. H. et WEINBERGER H. F., *Maximum principles in differential equations*, Prentice Hall, 1967.
- [9] ERDELYI A., *Higher Transcendental functions*, Mc Graw-Hill Book Company, vol. 2, 1953.
- [10] ERDELYI A., *Asymptotic Expansions*, Dover Publications Inc., 1956.
- [11] TODD L., *Hartmann flow in an annular channel* (*J. Fluid. Mech.*, vol. 28, Part 2, 1967, p. 371-384).
- [12] MAUSS J., *Structure de la solution asymptotique au voisinage des points singuliers, dans un domaine non convexe, pour un problème de perturbations singulières de type elliptique* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 268, série A, 1969, p. 275-277).

(Manuscrit reçu le 25 septembre 1969.)

PARIS — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS

55, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS

182648-71

Dépôt légal, Imprimeur, 1971, n° 1968

Imprimé en France

PARIS — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS

55, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS

182648-71

Dépôt légal, Imprimeur, 1971, n° 1968

Imprimé en France